Informationstechnik Lösung SS 2007

Prüfung: Informationstechnik MT 7D51
Termin: Mittwoch, 18. Juli 2007
8:30 – 10:30
Prüfer: Prof. J. Walter
Hilfsmittel: beliebig / kein Internet / kein WLAN

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Projekt: ______________________________

Stick: ______________________________

PC: ______________________________

bitte keine rote Farbe verwenden

(nicht ausfüllen) !

Aufgabe	mögl. Punkte	erreichte Punkte
1	12	
2	12	
3	15	
4	11	
Gesamt	50	
	Note	

Bearbeiten Sie die Aufgaben nur, falls Sie keine gesundheitlichen Beschwerden haben.

Viel Erfolg

Bemerkung:

Sie können die Vorder- und Rückseite benutzten. Es werden nur die auf den Prüfungsblättern vorhandenen oder fest mit den Prüfungsblättern verbundenen Ergebnisse gewertet.
Mit Abgabe dieser Arbeit bestätigen Sie das Löschen von HPVEE „Classroom-Lizenz" auf ihrem PC.

1. Gauß'sches Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate (12 Punkte)

Die Funktion: $f(t) = Heaviside(t) - 2 \cdot Heaviside(t - \frac{1}{2}) + Heaviside(t - 1)$

soll im Bereich $0 \le t \le 1.0$ optimal durch die Funktion $y(t) = b \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$ angenähert werden.

a) 8P Bestimmen Sie die Funktion.
b) 2P Skizzieren Sie das Ergebnis.
c) 2P Um welche-r/n Stelle/n tritt die größte Abweichung auf?

Lösung:

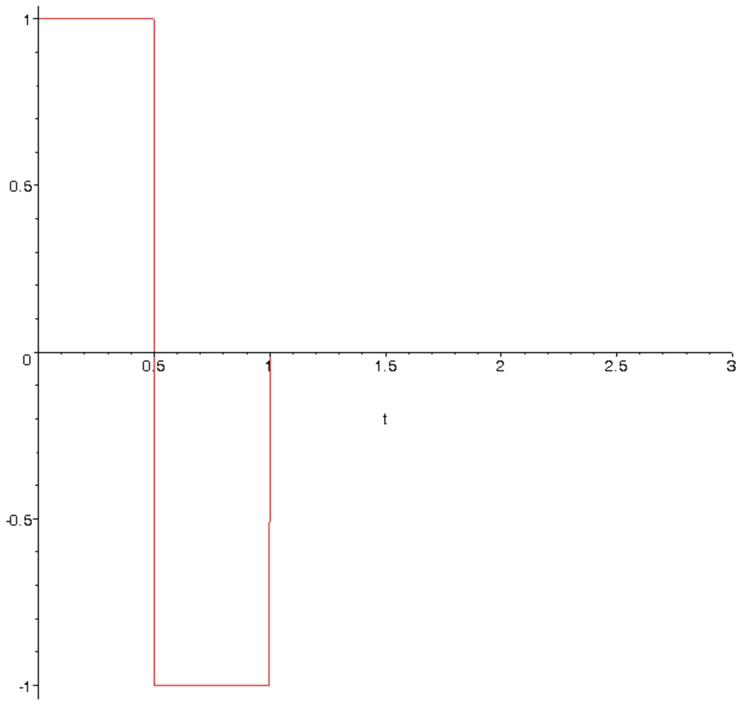
```
> restart;
```

Funktion Heaviside

```
> f:=Heaviside(t)-2*Heaviside(t-0.5)+Heaviside(t-1);
```

$$f := \text{Heaviside}(t) - 2\,\text{Heaviside}(t - 0.5) + \text{Heaviside}(t - 1)$$

```
> plot(f,t=0..3);
```




```
> y:=b*sin(2*Pi*t);
```

$$y := b \sin(2\,\pi\,t)$$

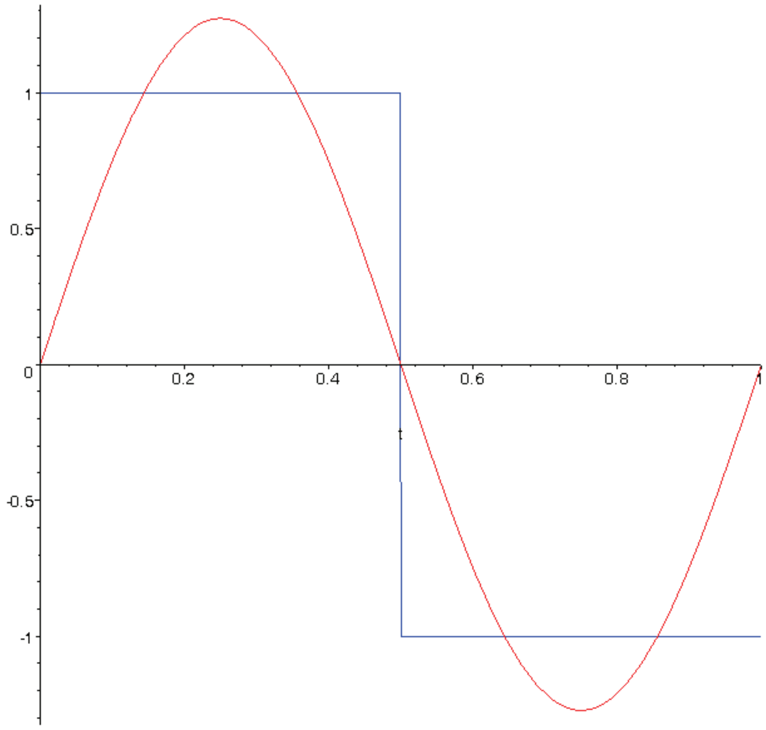
```
> dS:=diff(int((y-f)^2,t=0..1),b);
```

$dS := -1.273239545 + 1.000000000\, b$

```
> b:=1.273239545;
```

$b := 1.273239545$

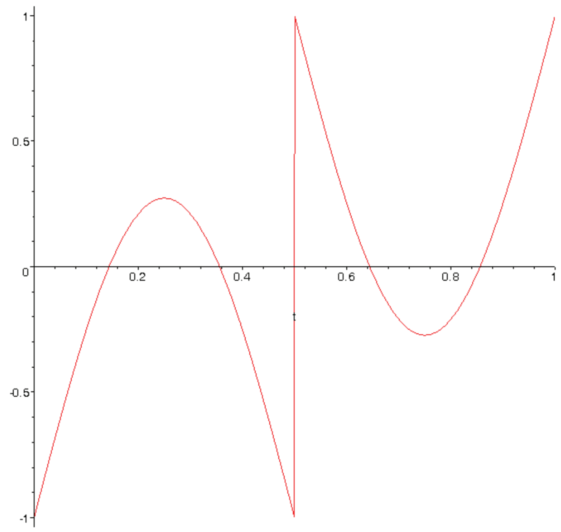
```
> plot([b*sin(2*Pi*t),f],t=0..1,
color=[red,blue],style=[line,line]);
```




```
>
> > A:=b*sin(2*Pi*t)-f;
```

$A := 1.273239545\,\sin(2\,\pi\,t) - \mathrm{Heaviside}(t) + 2\,\mathrm{Heaviside}(t - 0.5) - \mathrm{Heaviside}(t - 1)$

```
> plot(A,t=0..1);
```




```
>
```

2. DFT (12 Punkte)

Die Funktion $f(t) = Heaviside(t) - 2 \cdot Heaviside(t - \frac{1}{2}) + Heaviside(t-1)$ mit der Frequenz 1.0 Hz wird mit der Blockgröße N=10 abgetastet.

a) 1P Tragen Sie die Zeitwerte für die Abtastpunkte in die nachfolgende Tabelle ein.
b) 1P Tragen Sie die Amplitudenwerte der Funktion in die Tabelle ein.
c) 1P Skizzieren Sie die Funktion und deren Abtastwerte.
d) 6P Berechnen Sie für die Funktion aus den Abtastwerten jeweils die skalierte DFT für m=0, m=1, m=2, m=3, m=4. Bitte mit Angabe der Formel!!!
e) 1P Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum der skalierten DFT für die Funktion.
f) 2P Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Amplitude b von Aufgabe 1 und der Amplitude der ersten Harmonischen dieser Aufgabe?

n=	t/s	f[n]	
0	0	0	
1	0,1	1	
2	0,2	1	
3	0,3	1	
4	0,4	1	
5	0,5	0	1
6	0,6	-1	
7	0,7	-1	
8	0,8	-1	
9	0,9	-1	

Bei einem Pulse Delay von 0.5 entsteht bei HPVEE f[n=5]=0. Hier wurden in der Klausur beide Lösungen als richtig bewertet. Der Mittelwert 0 bedingt aber f[5]=0.

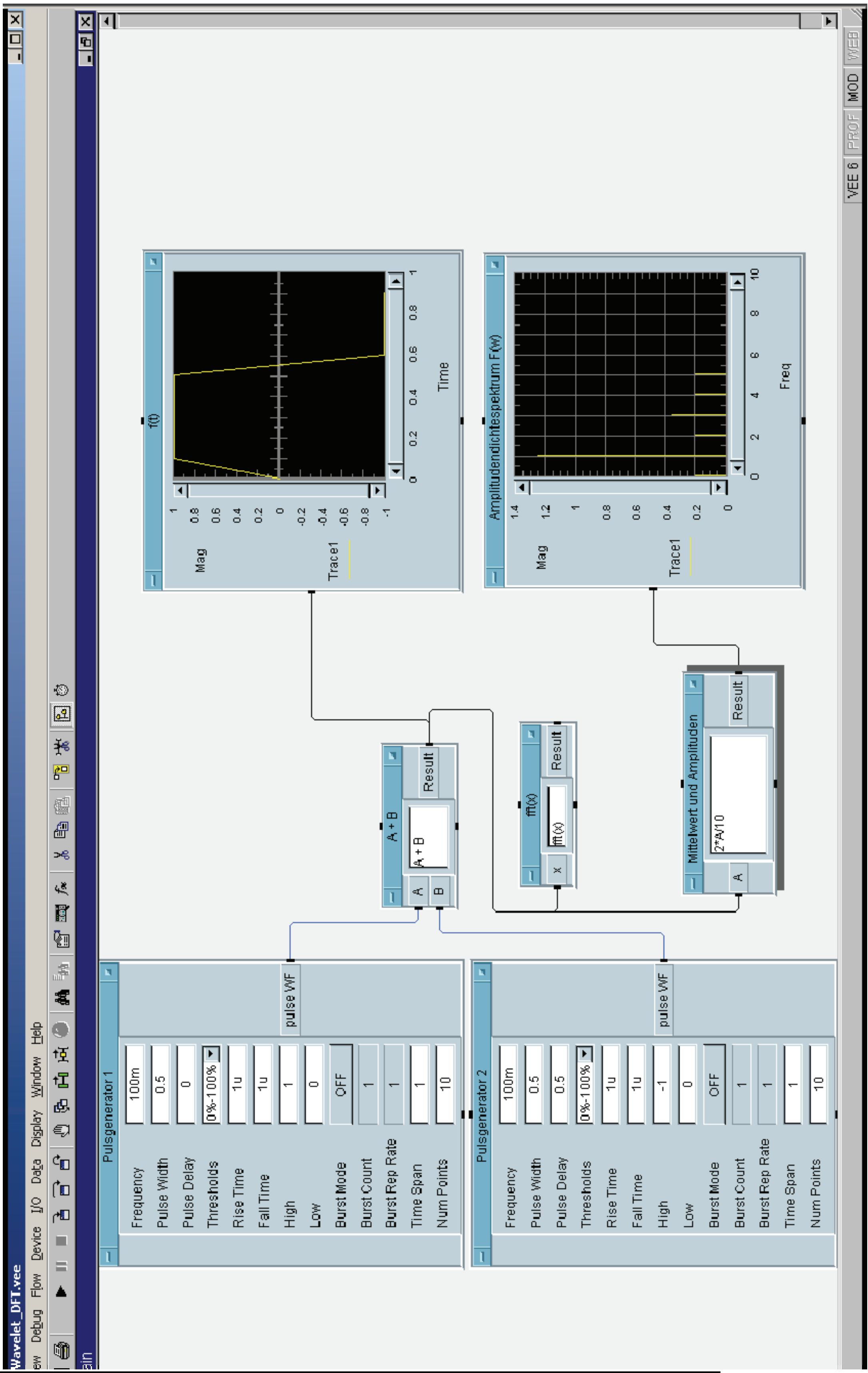
Lösung d)

$$|s_m| = 2 * \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] * \left[\cos \frac{2\pi mn}{N} - j \sin \frac{2\pi mn}{N} \right] \right|$$

Lösung f)

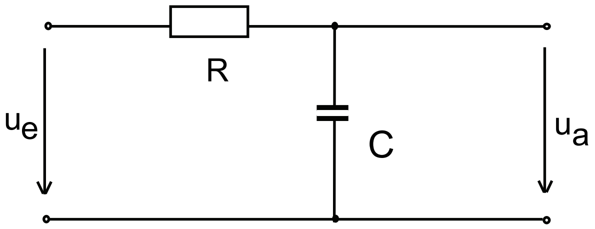
Die Amplituden müssen gleich sein, die DFT-Amplituden und die Amplitude der Fourierreihe für die erste Harmonische sind gleich. Die Fourierreihe bildet die optimale Annäherung im Sinne des Gauß'schen Fehlerquadrates.

Siehe auch HP VEE
Siehe Maple Wavelet_DFT.vee



3. DGL - Übertragungsfunktion - Systemantwort (15 Punkte)

Gegeben ist ein Tiefpass:



Schaltung mit R und C

a) (3P) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s)$
b) (1P) Erstellen Sie die Übertragungsfunktion G_2 (s) für die Werte $R=1;$ $C=1$
- Darstellung: Die höchste Potenz im Nenner hat den Faktor 1.

(10P) Bestimmen Sie die Antwort y(t) des Systems G_2 (s) auf die Eingangsfunktion:

```
> x2:=+sum('Heaviside(t-0.5*k)*(-1)^k','k'=0..20)-
1.0*Heaviside(t-10);
```

Hinweis: Schreiben Sie den Ansatz für Maple auf. Als Ergebnis genügt die Skizze. Das Ergebnis ist etwas umfangreicher. Skizzieren Sie die Eingangsfunktion.

c) (2P) Skizzieren Sie Antwort für t=0 bis t=15.

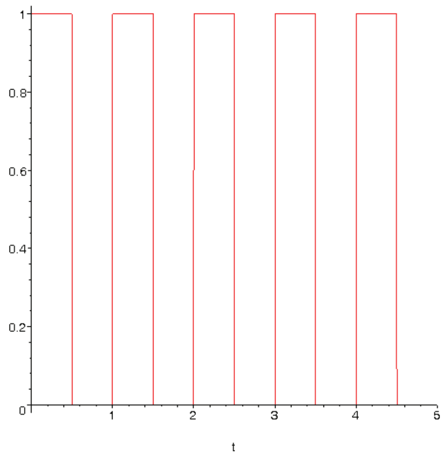
Lösung Aufgabe 3a

```
> restart;
> with (inttrans):
> assume(a>0);
```

Funktion eingeben:

```
> x(t):=+sum('Heaviside(t-0.5*k)*(-1)^k','k'=0..20)-
1.0*Heaviside(t-10);
plot(x(t), t=0..5);
```

$$x(t) := \mathrm{Heaviside}(t) - 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 0.5000000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 1.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 1.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 2.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 2.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 3.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 3.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 4.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 4.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 5.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 5.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 6.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 6.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 7.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 7.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 8.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 8.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 9.)$$
$$- 1.\ \mathrm{Heaviside}(t - 9.500000000) + \mathrm{Heaviside}(t - 10.) - 1.0\ \mathrm{Heaviside}(t - 10)$$




```
> X(s):=laplace(x(t),t,s);
```

$$X(s) := \frac{1}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-0.5000000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-1.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-1.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-2.\ s)}}{s^{1.}}$$
$$- \frac{1.\ e^{(-2.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-3.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-3.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-4.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-4.500000000\ s)}}{s^{1.}}$$
$$+ \frac{e^{(-5.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-5.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-6.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-6.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-7.\ s)}}{s^{1.}}$$
$$- \frac{1.\ e^{(-7.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-8.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-8.500000000\ s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-9.\ s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\ e^{(-9.500000000\ s)}}{s^{1.}}$$

>

Hier Übertragungsfunktion eingeben:

```
> G(s):=1/(s+1);
```

$$G(s) := \frac{1}{s+1}$$

```
> Y(s):=G(s)*X(s);
```

$$Y(s) := \left(\frac{1}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-0.5000000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-1.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-1.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-2.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-2.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-3.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-3.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-4.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-4.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-5.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-5.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-6.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-6.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-7.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-7.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-8.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-8.500000000\, s)}}{s^{1.}} + \frac{e^{(-9.\, s)}}{s^{1.}} - \frac{1.\, e^{(-9.500000000\, s)}}{s^{1.}}\right) / (s + 1)$$

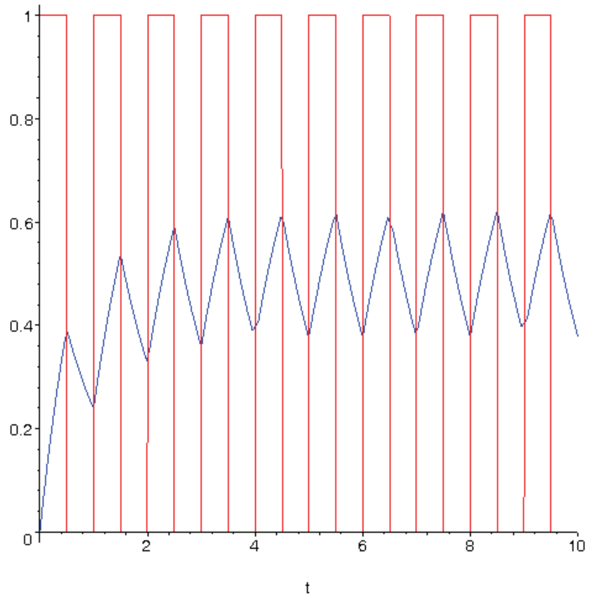
```
> y(t):=invlaplace(Y(s), s, t);
```

zusätzlich Zeichengrenzen eingeben:

$$\begin{aligned} y(t) := {} & 2.\, e^{(-0.5000000000\, t)} \sinh(0.5000000000\, t) - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 0.5000000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 0.2500000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 0.2500000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 1.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 0.5000000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 0.5000000000) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 1.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 0.7500000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 0.7500000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 2.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 1.)} \sinh(0.5000000000\, t - 1.) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 2.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 1.250000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 1.250000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 3.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 1.500000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 1.500000000) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 3.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 1.750000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 1.750000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 4.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 2.)} \sinh(0.5000000000\, t - 2.) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 4.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 2.250000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 2.250000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 5.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 2.500000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 2.500000000) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 5.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 2.750000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 2.750000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 6.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 3.)} \sinh(0.5000000000\, t - 3.) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 6.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 3.250000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 3.250000000) \\ & + 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 7.)\, e^{(-0.5000000000\, t + 3.500000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 3.500000000) \\ & - 2.\, \mathrm{Heaviside}(t - 7.500000000)\, e^{(-0.5000000000\, t + 3.750000000)} \sinh(0.5000000000\, t - 3.750000000) \end{aligned}$$

$$+\,2.\ \mathrm{Heaviside}(t-8.)\ e^{(-0.5000000000\ t+4.)}\ \sinh(0.5000000000\ t-4.)-2.$$
$$\mathrm{Heaviside}(t-8.500000000)\ e^{(-0.5000000000\ t+4.250000000)}$$
$$\sinh(0.5000000000\ t-4.250000000)+$$
$$2.\ \mathrm{Heaviside}(t-9.)\ e^{(-0.5000000000\ t+4.500000000)}\ \sinh(0.5000000000\ t-4.500000000)$$
$$-\,2.\ \mathrm{Heaviside}(t-9.500000000)\ e^{(-0.5000000000\ t+4.750000000)}$$
$$\sinh(0.5000000000\ t-4.750000000)$$

```
> plot([x(t),y(t)], t=0..10, color=[red,blue],
style=[line,line]);
```



\>

4 FIR-Filter (11 Punkte)

An einem Motoren-Prüfstand wird ein FIR-Bandpass von 10kHz bis 15 kHz mit N=8 eingesetzt. Die Abtastfrequenz beträgt 48kHz.

a. Berechnen Sie die Filterkoeffizienten und skizzieren Sie das Ausgangssignal bei einem Eingangsimpuls der Breite 5 und der Amplitude 1.

Damit die Anlage werbewirksamer verkauft werden kann, möchte ein Verkäufer einzig die Abtastfrequenz von 48kHz auf 96kHz erhöhen. Um die „Verbesserung" nachzuweisen, vergleicht ein Ingenieur die beiden Ergebnisse auf den Testimpuls der Breite 5.

b. Welche Differenz der beiden Lösungen ist bei der höchsten Amplitude des Ausgangssignals zu erwarten?

c. Was hat der Verkäufer nicht berücksichtigt?

a) Die Filtergleichung für das FIR-Filter

$$y_{nFIR} = \left[\sum_{k=-N}^{k=N} a_k * x_{n-k} \right]$$

Lösung:

$$a_k = 2 * \frac{f_g}{f_a} * si(k * 2\pi * \frac{f_g}{f_a}) = a_{-k}$$ Formel für Tiefpass

k	ak
0	0,208
1	-0,013
2	-0,192
3	0,034
4	0,148
5	-0,041
6	-0,091
7	0,030
8	0,034
9	
10	

$$y_n = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k * x_{n-k}$$

Lösung mit 48kHz Abtastrate aus Excel: FIR-SS07_48kHz.xls (Tobias Zachmann)

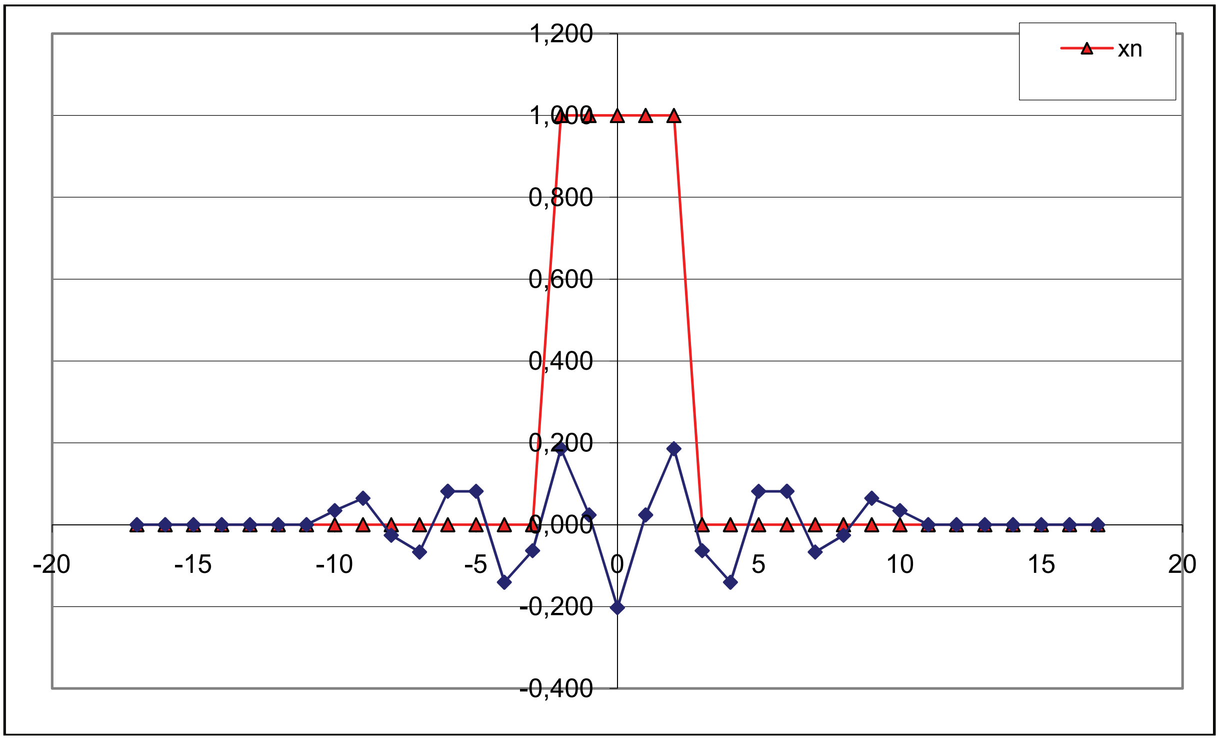


Bild: Antwort des Bandpasses mit Abtastfrequenz 48kHz auf einen Impuls der Breite 5

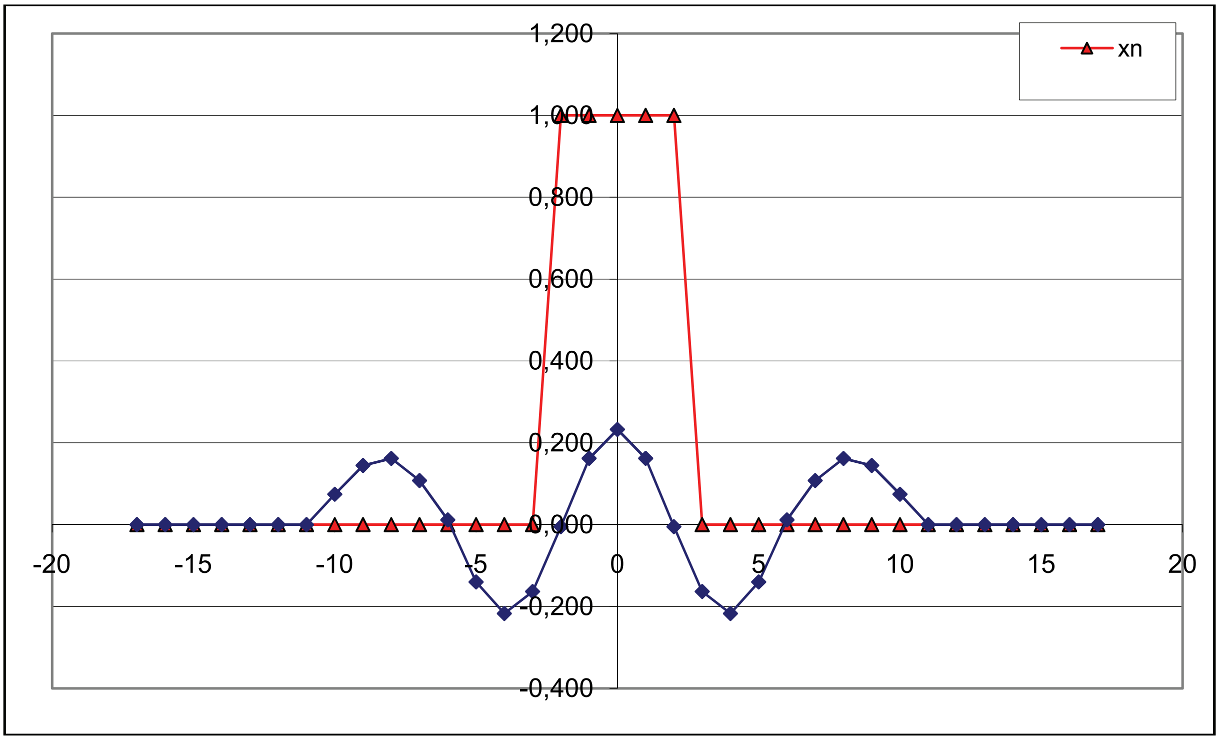


Bild: Antwort des Bandpasses mit Abtastfrequenz 96kHz auf einen Impuls der Breite 5

Die schönen Lösungen in Excel sind von Herrn Tobias Zachmann (Klausur SS07)

b) Die Differenz ist 0,4
c) Der Verkäufer hat den Zusammenhang zwischen Abtastfrequenz und Signalfrequenz bei einem FIR-Filter nicht berücksichtigt!